Krótka rozprawa na temat czasu rozpadu pierwiastka promieniotwórczego

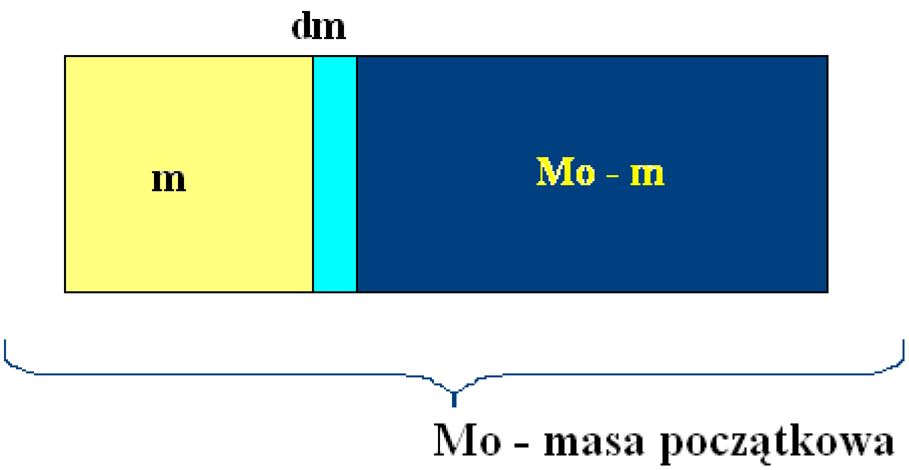
Rozpatrzmy następujący problem: Mamy określoną ilość (masę początkową) jakiegoś pierwiastka promieniotwórczego o danym okresie połowicznego rozpadu. Należy wyznaczyć zależność zmiany masy tego pierwiastka w funkcji czasu.

Jak powszechnie wiadomo, połowiczny okres rozpadu pierwiastka to czas, po jakim z określonej, początkowej masy tego pierwiastka pozostaje połowa. Zatem mając do dyspozycji połowiczny okres rozpadu w bardzo prosty sposób można wyznaczyć, po jakim czasie z danej ilości pierwiastka pozostanie **połowa, jedna czwarta, jedna ósma, jedna szesnasta** itd. początkowej jego ilości (masy). Trudniej jednak byłoby wyznaczyć czas, po jakim z masy początkowej pierwiastka pozostałaby jej np. **jedna siedemnasta** część. Do tego celu należałoby wyznaczyć następującą zależność:

$$m(t) = f(M_0, T, t) \qquad \text{gdzie:}$$

M_0 - masa początkowa pierwiastka (= const)
T - czas połowicznego rozpadu pierwiastka (= const)
t - czas bieżący

Sytuację taką można zobrazować następującym rysunkiem:



Oznaczenia na rysunku:

M_0 – masa początkowa

m – masa, która uległa rozpadowi (po czasie t)

dm – masa, która aktualnie ulega rozpadowi (w nieskończenie krótkim czasie dt)

Wiadomo jest, że **chwilowa szybkość rozpadu** pierwiastka jest wprost proporcjonalna do **stałej rozpadu** (λ) i do **masy pierwiastka, jaka jeszcze pozostała** ($M_0 – m$):

$$\frac{dm}{dt} = \lambda(M_0 - m)$$

Rozwiązujemy to równanie, wyznaczając m:

$$\frac{dm}{M_0 - m} = \lambda \cdot dt$$

$$\frac{dm}{m - M_0} = -\lambda \cdot dt$$

$$\int \frac{dm}{m - M_0} = -\int \lambda \, dt + C$$

$$\ln|m - M_0| = -\lambda \cdot t + C$$

$$|m - M_0| = e^{-\lambda \cdot t + C}$$

Ponieważ prawa strona ostatniego równania jest dodatnia, więc można się pozbyć znaku wartości bezwzględnej i zapisać:

$$M_0 - m = e^{-\lambda \cdot t + C}$$

Teraz należy wyeliminować stałą całkowania C uwzględniając warunek, że na początku (dla t = 0) wartość m = 0. Podstawmy to do ostatniego równania:

$M_0 = e^C$ Podstawiając tę równość do ostatniego wzoru otrzymamy wynik:

$$M_0 - m = M_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad (1)$$

Lewa strona równania to właśnie masa pierwiastka, jaka nam jeszcze pozostała po czasie t (patrz rys.)
Ale nie znamy wartości λ jaka figuruje w tej zależności, ale wiemy, że czas połowicznego rozpadu tego pierwiastka wynosi T. Ta informacja posłuży nam do wyeliminowania z powyższej zależności stałej rozpadu λ:

Po czasie T z masy początkowej M_0 pozostaje połowa, czyli ½M_0 co zapiszemy następująco:

$\frac{M_0}{2} = M_0 e^{-\lambda \cdot T}$ a po uproszczeniu $\frac{1}{2} = e^{-\lambda \cdot T}$, stąd wyznaczamy wartość λ:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T},$$

podstawmy ten wynik do wzoru (1):

$$M_0 - m = M_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t} = M_0 (e^{\ln 2})^{-\frac{t}{T}} = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

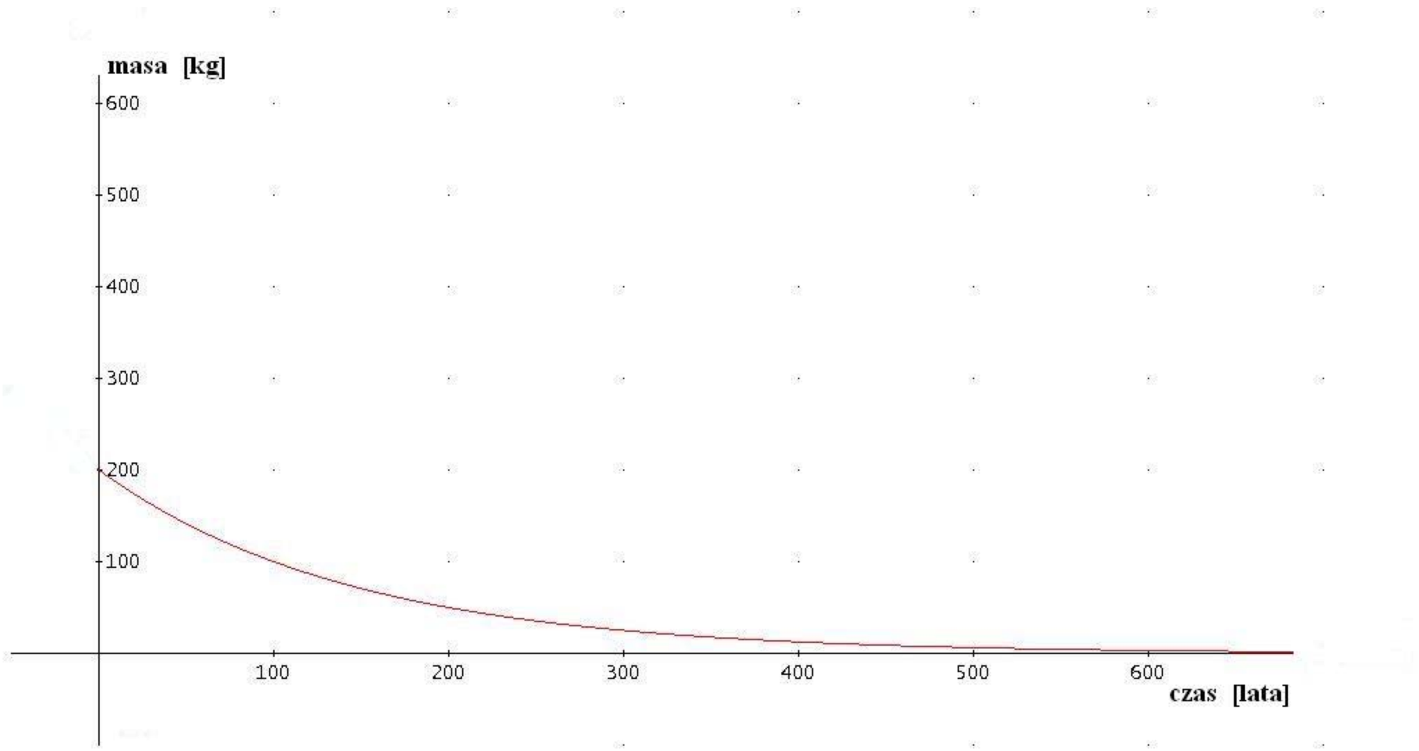
Oznaczmy przez m_p masę pierwiastka, która pozostała po czasie t, czyli:

$$m_p = M_0 - m$$

Podstawiając to do wzoru (1), otrzymamy wynik końcowy:

$$m_p = m_p(t) = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} \qquad (2)$$

Zależność tę można przedstawić na wykresie czasowym, przyjmując np. M_0 = 200kg oraz T = 100 lat:



Teraz, mając do dyspozycji ostateczną zależność (2), możemy ilościowo **w każdym momencie czasowym** wyznaczyć ilość pozostałej (lub uległej rozpadowi) masy substancji promieniotwórczej.

(opr. R.Chybicki)