Ryszard Chybicki

Swobodny spadek ciał w ośrodku stawiającym opór

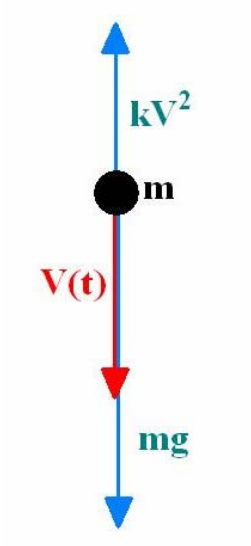
Mielec, 2005

Swobodny spadek ciała ośrodku stawiającym opór

Obserwując czasami skoki spadochronowe z dużych wysokości można sobie postawić pytanie: Do jakiej prędkości rozpędziłby się spadochroniarz przy powierzchni Ziemi, gdyby nie otworzył spadochronu? Podejdźmy do tego zagadnienia bardziej abstrakcyjnie i zadajmy inne pytanie: Do jakiej prędkości rozpędziłoby się ciało spadające w powietrzu, gdyby mogło spadać „w nieskończoność”? Jeżeli założymy, że powietrze nie stawia oporu spadającemu ciału (co jest nieprawdą) to jest oczywiste, że prędkość ta (pomijając teorię względności Einsteina) rosłaby również do nieskończoności. Jednak okazuje się, że opór powietrza oddziałujący na spadające (czy w ogóle poruszające się) ciało istnieje, czego każdy może doświadczyć, wystawiając przez okno pędzącego samochodu otwartą dłoń. Im szybciej jedzie samochód, tym siła oporu działająca na dłoń jest większa. Okazuje się, że wartość siły oporu jest wprost proporcjonalna do kwadratu prędkości spadającego ciała. Idąc dalej tym tropem, można dojść do wniosku, że w pewnym momencie dojdzie do sytuacji, gdy siła ciężkości działająca ze strony grawitacji na spadające ciało zostanie zrównoważona przez siłę oporu powietrza i dalej ciało będzie spadało ruchem jednostajnym (znów dla wygody załóżmy, że przyśpieszenie grawitacyjne **g** w tym przypadku jest stałe – co także nie jest prawdą, ale dla ciał spadających na odcinkach nieporównanie mniejszych od rozmiarów Ziemi może być do przyjęcia). Spróbujmy wyznaczyć zależność prędkości spadającego ciała od czasu spadania przyjmując następujące założenia:

- ciało spada w powietrzu o stałej gęstości przez czas „wystarczająco długi”)*
- siła grawitacji, działająca na ciało jest cały czas stała
- siła oporu powietrza, skierowana przeciwnie do siły ciężkości, jest wprost proporcjonalna do już osiągniętej prędkości tego ciała

Sytuację można zobrazować następująco:



Oznaczenia:

- m (masa ciała)
- V = V(t) (chwilowa prędkość spadania)
- k (współczynnik proporcjonalności)
- m·g (stała z założenia siła grawitacji)
- $k \cdot V^2$ (siła oporu powietrza)

Teraz można zapisać następującą równość:

$m \cdot a = m \cdot g - k \cdot V^2$ gdzie $a = a(t)$ jest chwilowym zmiennym przyspieszeniem spadającego ciała.

Dokonujemy przekształceń:

$$a = g - \frac{k}{m} \cdot V^2 \qquad a = \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = g(1 - \frac{k}{mg} \cdot V^2) \qquad\qquad \frac{dV}{1 - \frac{k}{mg} \cdot V^2} = g \cdot dt$$

dokonujemy obustronnego całkowania:

$$\int \frac{dV}{1 - \frac{k}{mg} \cdot V^2} = g \int dt + C \qquad \text{czyli}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{k}{mg}}} \cdot \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot V}{1 - \sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot V} \right| = gt + C \qquad (1)$$

wyznaczmy stałą C z warunku brzegowego:
dla t = 0 (początek spadania) V=V(t) = 0, stąd wniosek, że C = 0 (wyrażenie (1))

Zatem wynik całkowania to:

$$\ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot V}{1 - \sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot V} \right| = 2\sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot gt , \qquad \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot V}{1 - \sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot V} \right| = e^{2\sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot gt}$$

Ponieważ prawa strona ostatniego wyrażenia jest dodatnia, więc można pozbyć się wartości bezwzględnej i wyznaczyć prędkość V = V(t):

(dla wygody oznaczmy: $\lambda = \sqrt{\frac{k}{mg}} = const$)

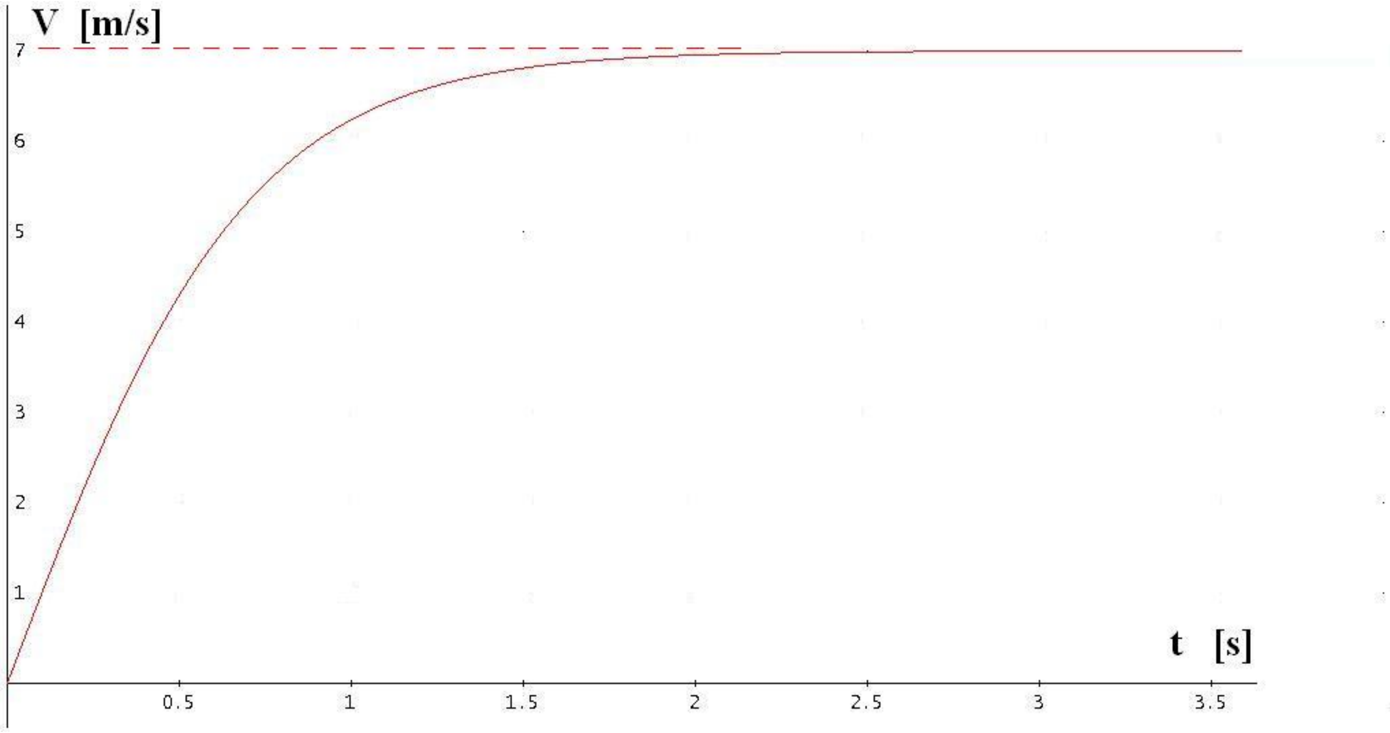
$$\frac{1 + \lambda V}{1 - \lambda V} = e^{2\lambda \cdot gt} , \qquad \lambda V = \frac{e^{2\lambda \cdot gt} - 1}{e^{2\lambda \cdot gt} + 1} \qquad \text{czyli:}$$

$$V = V(t) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{e^{2\lambda \cdot gt} - 1}{e^{2\lambda \cdot gt} + 1}$$

W ten sposób zmienia się prędkość ciała spadającego swobodnie w ośrodku stawiającym opór.

Przebieg zmienności V(t) można przedstawić na wykresie, przyjmując:

$$\lambda = \frac{1}{7}\left[\frac{s}{m}\right], \quad g = 10\left[\frac{m}{s^2}\right]$$



Sprawdźmy, jak zmienia się przyśpieszenie tego spadającego ciała w funkcji czasu, czyli wyznaczmy zależność:

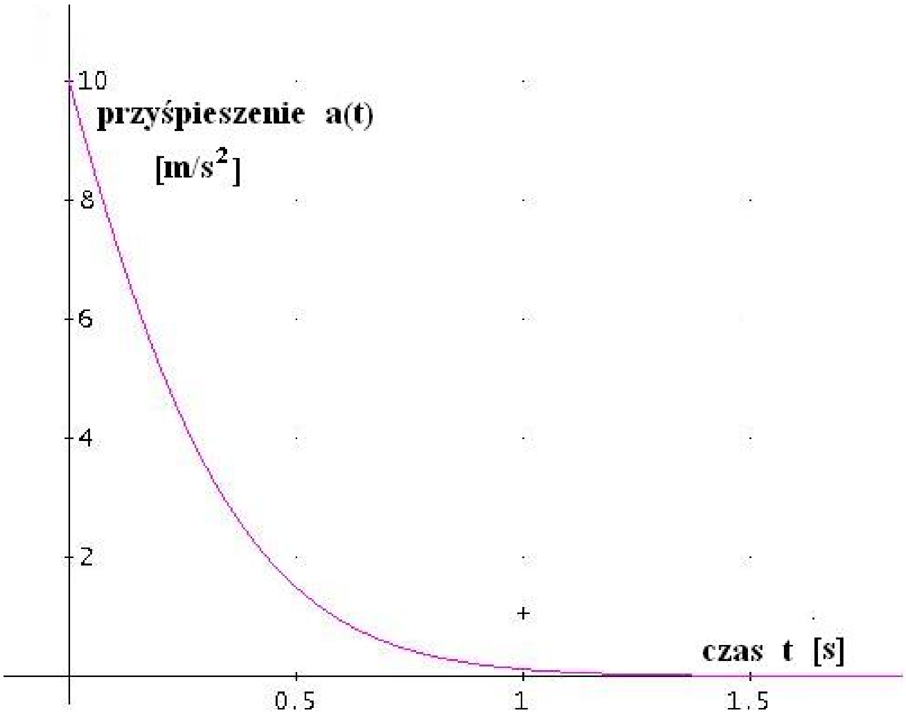
$$a(t) = \frac{dV}{dt}$$

Po wykonaniu kilku prostych operacji otrzymamy następujący wynik:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\lambda}\cdot\left[\frac{\frac{d(e^{2\lambda\cdot gt}-1)}{dt}\cdot(e^{2\lambda\cdot gt}+1) - \frac{d(e^{2\lambda\cdot gt}+1)}{dt}\cdot(e^{2\lambda\cdot gt}-1)}{(e^{2\lambda\cdot gt}+1)^2}\right]$$, stąd otrzymamy:

$$a(t) = \frac{4g}{(e^{2\lambda\cdot gt}+1)^2}$$

dokonując podstawień jak poprzednio, otrzymamy przebieg tej zależności w funkcji czasu:



Na koniec rozważmy, jak zmienia się droga przebyta przez spadające ciało w funkcji czasu. W tym celu należy wyznaczyć prostą całkę nieoznaczoną i uwzględnić warunek brzegowy, czyli:

$$S(t) = \int V(t)dt \text{ przy założeniu, że } S(t=0) = 0$$

Tu należy zauważyć, ze po wyznaczeniu zależności S(t) będzie można spróbować wyznaczyć wartość ***k*** dla spadającego ciała w danym ośrodku, mając dokładnie zmierzony czas spadania na znanym odcinku drogi.

Wyznaczmy zatem powyższą całkę:

$$\int \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{e^{2\lambda \cdot gt} - 1}{e^{2\lambda \cdot gt} + 1} dt = \frac{1}{\lambda} \int \frac{e^{2\lambda \cdot gt} - 1}{e^{2\lambda \cdot gt} + 1} dt = ? \text{ tu dokonajmy podstawienia:}$$

$$x = e^{2\lambda \cdot gt} \qquad dx = 2\lambda \cdot g \cdot e^{2\lambda \cdot gt} = 2\lambda \cdot gx$$

$$dt = \frac{dx}{x \cdot 2\lambda g}$$

Obliczamy (po podstawieniu):

$$\frac{1}{2\lambda^2 g} \int \frac{x-1}{x(x+1)} dx = \frac{1}{2\lambda^2 g}\left[\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x(x+1)}\right] = \frac{1}{2\lambda^2 g}\left[\int \frac{dx}{x+1} - \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx\right] \text{ w efekcie}$$

otrzymamy:

$$\frac{1}{2\lambda^2 g} \int \frac{x-1}{x(x+1)} dx = \frac{1}{2\lambda^2 g}\left[2\ln|x+1| - \ln|x| + C\right]$$

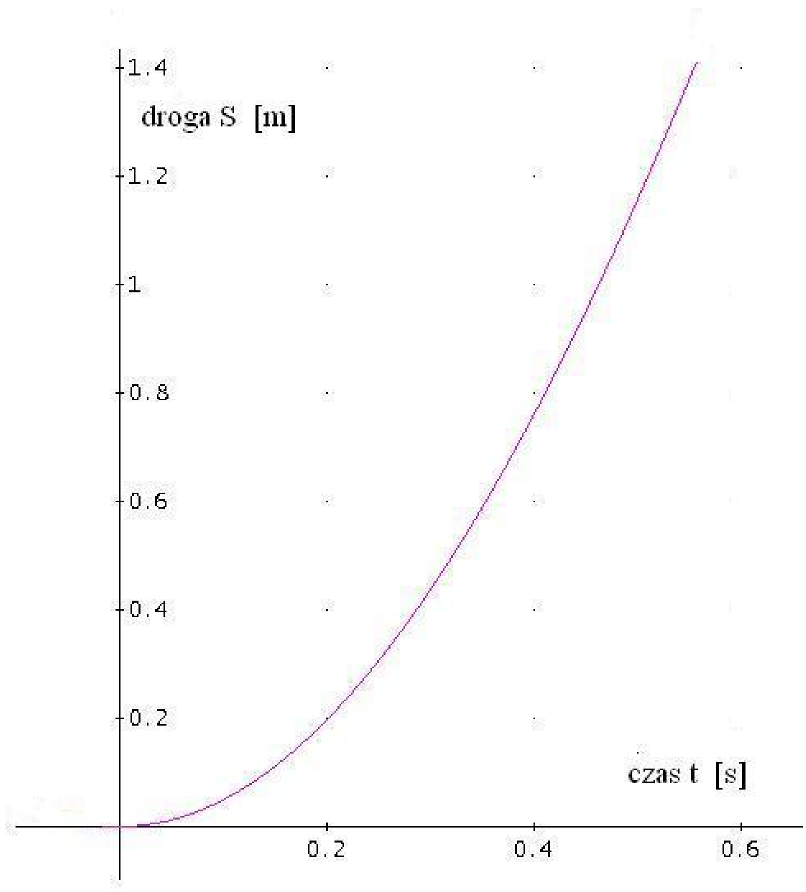
Wyznaczamy C:

dla t = 0   S = 0 oraz x = 1 więc $0 = \frac{1}{2\lambda^2 g}\left(2\ln 2 - \ln 1 + C\right)$ czyli $C = -2\ln 2$

Podstawiając, otrzymujemy wynik ostateczny: $S(t) = \frac{1}{2\lambda^2 g}\left[2\ln(e^{2\lambda\cdot gt}+1) - \ln e^{2\lambda\cdot gt} - 2\ln 2\right]$ lub

$$S(t) = \frac{1}{2\lambda^2 g}\cdot\ln\frac{\left(e^{2\lambda\cdot gt}+1\right)^2}{4e^{2\lambda\cdot gt}}$$

Podstawiając dane jak poprzednio można narysować przebieg czasowy S(t):



Wróćmy do podstawienia:

$$\lambda = \sqrt{\frac{k}{mg}} = const$$

Teraz nasz wzór przyjmie postać:

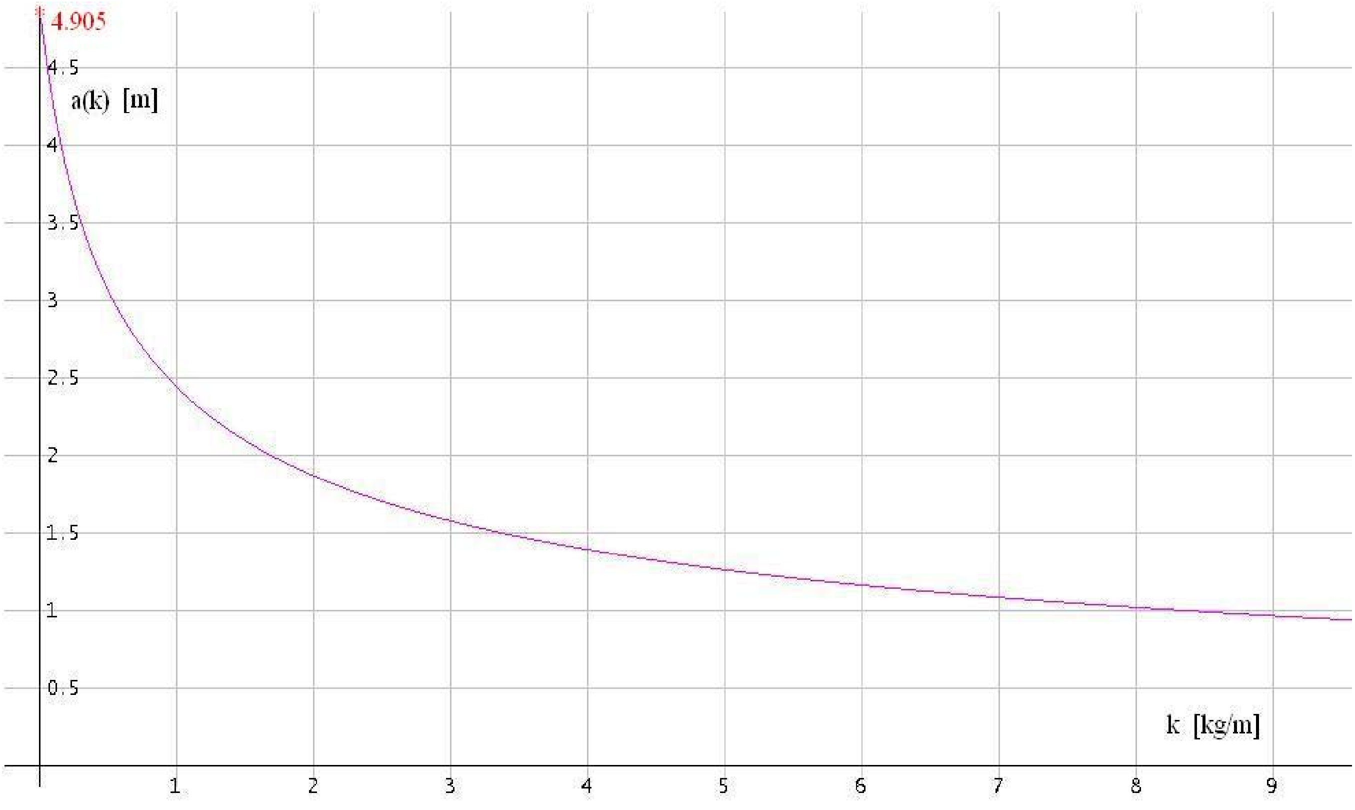
$$S(t)=\frac{m}{2k}\cdot\ln\left[\frac{\left(e^{2\cdot\sqrt{\frac{gk}{m}}\cdot t}+1\right)^2}{4e^{2\cdot\sqrt{\frac{gk}{m}}\cdot t}}\right]$$

*Teraz można spróbować wyznaczyć stałą **k**, przeprowadzając następujące doświadczenie: Dokonujemy dokładnego pomiaru drogi spadającego ciała (w danym ośrodku)* ***w ciągu pierwszej sekundy.*** *Oznaczmy tę drogę przez* a(k) *i podstawmy te dane do powyższego wzoru, przyjmując jednocześnie:*

$m=1[kg]$ $\quad g=9.81\left[\frac{m}{s^2}\right]$

$$a(k)=\frac{1}{2k}\cdot\ln\left[\frac{\left(e^{2\sqrt{9.81\cdot k}}+1\right)^2}{4e^{2\sqrt{9.81\cdot k}}}\right]$$

narysujmy przebieg tej zależności:



*(przy okazji można zauważyć, ze w próżni **(k = 0)** ciało przebędzie w ciągu pierwszej sekundy drogę:*

$$a(k=0)=\frac{gt^2}{2}=\frac{9.81\left[\frac{m}{s^2}\right]\cdot\left(1[s]\right)^2}{2}=4.905[m],$$ *co zgadza się z powyższym wykresem)*

Mając do dyspozycji powyższy wykres można (w oparciu o znajomość długości drogi spadającego ciała w ciągu **pierwszej sekundy**) wyznaczyć współczynnik ***k***. Współczynnik ten wyznaczymy tym dokładniej, im dokładniej narysujemy wspomniany wykres.

(opr. Ryszard Chybicki)