Ryszard Chybicki

TORY PLANET

(Rozważania na temat kształtów torów ruchu planety wokół stacjonarnej gwiazdy)

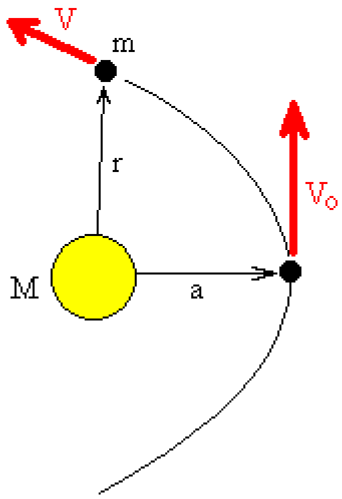
MIELEC 2002

Planecie o masie **m**, znajdującej się w odległości **a** od gwiazdy o masie **M** nadano prędkość $\mathbf{V_0}$ (jak na rysunku 1.)
Należy wyznaczyć równania możliwych torów, po których będzie poruszać się ta planeta (w zależności od $\mathbf{V_0}$ i **a**).
Przyjąć, ze gwiazda jest masą stacjonarną.

Równanie ruchu planety o masie **m** obiegającej gwiazdę o masie **M** we współrzędnych biegunowych ma postać:

$$\boxed{m\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{Mm}{r^2} + \frac{mV^2}{r}}$$

Równanie to mówi, że siła wypadkowa działająca na **m** jest sumą sił grawitacji i siły odśrodkowej. Sytuację tę przedstawia rysunek:



Rys.1

Ponieważ w dalszym ciągu zamierzamy posługiwać się współrzędnymi biegunowymi, gdzie zmiennymi są długość promienia wodzącego (**r**) i kąt, jaki tworzy on z osią x (φ), wobec tego wyraźmy siłę odśrodkową w funkcji prędkości kątowej ω:

$$V = \omega \cdot r$$

Wtedy otrzymamy:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{mM}{r^2} + m\omega^2 r \qquad (1)$$

W tym równaniu zarówno $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ jak i $\omega = \omega(t)$

W tego typu ruchu planety względem gwiazdy wiadomo, że pęd planety **J** w każdym punkcie toru ruchu jest wielkością stałą, czyli

$$J = \text{const}$$

Ponieważ wiadomo, że w ruchu obrotowym

$$J = m \cdot V_{\perp r} \cdot r = m \cdot \omega \cdot r \cdot r = m \cdot \omega \cdot r^2$$

więc

$$\omega^2 = \frac{J^2}{m^2 \cdot r^4} \qquad (2)$$

($V_{\perp r}$ oznacza prędkość „prostopadłą” do promienia **r**.)

Podstawiając wyrażenie (2) do wzoru (1) otrzymujemy:

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = -G\frac{mM}{r^2} + \frac{J^2}{mr^3} \qquad (2')$$

(J = const)

Jak się okazało w praktyce, powyższe równanie będzie łatwiej rozwiązać, jeżeli zmienną **r** wyrazimy nie w funkcji czasu (**t**) lecz w funkcji kąta (**φ**). Można tego dokonać poprzez następujące przekształcenia:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr \cdot d\varphi}{d\varphi \cdot \cdot dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \omega,$$

lecz uwzględniając wzór (2) otrzymamy:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{J}{mr^2}.$$

Obliczmy drugą pochodną tego wyrażenia względem czasu:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right) \cdot \frac{J}{mr^2} + \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{J}{mr^2}\right) \quad \text{czyli:}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \left(\frac{d^2 r}{d\varphi^2} \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right)\frac{J}{mr^2} - \left(\frac{J}{m} \cdot \frac{2}{r^3} \cdot \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right)\frac{dr}{d\varphi} \quad ; \quad \text{ale} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega = \frac{J}{mr^2}$$

[wzór (2)] więc:

$$\boxed{\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 r}{d\varphi^2} \cdot \left(\frac{J}{mr^2}\right)^2 - \frac{2}{r^3} \cdot \frac{J}{m} \cdot \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \cdot \frac{J}{mr^2}} \qquad (3)$$

Jest to nadal nasze równanie wyjściowe, lecz nieco przekształcone i obustronnie podzielone przez **m.** Zauważmy**,** że po prawej stronie **nie występuje czas t**, ponieważ „zniknął” w wyrażeniu dφ/dt. Aby je rozwiązać, wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$w(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)} \qquad (3')$$

Obliczmy drugą pochodną tej nowej zmiennej względem kąta φ :

$$\frac{dw}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} \ ,$$

zatem druga pochodna względem kąta φ ma postać:

$$\boxed{\frac{d^2w}{d\varphi^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\varphi^2} + \left(\frac{2}{r^3}\frac{dr}{d\varphi}\right)\cdot\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\varphi^2} + \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \qquad (4)$$

Wyciągnijmy we wzorze (3) przed nawias czynnik $\left(\frac{J}{mr}\right)^2$; otrzymamy wówczas:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \left(\frac{J}{mr}\right)^2\left[\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]$$

ale wyrażenie w nawiasie kwadratowym to wyznaczone równaniem (4) $\left(-\frac{d^2w}{d\varphi^2}\right)$, czyli można zapisać, że:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\left(\frac{J}{mr}\right)^2\frac{d^2w}{d\varphi^2} = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{J}{m}\right)^2\frac{d^2w}{d\varphi^2}$$

Powyższe równanie wstawimy do wzoru (2’), zapisanego w ten sposób:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} + \left(\frac{J}{m}\right)^2\cdot\frac{1}{r^3}$$

Otrzymujemy w efekcie:

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{J}{m}\right)^2\frac{d^2w}{d\varphi^2} = \frac{1}{r^2}GM - \frac{1}{r^3}\left(\frac{J}{m}\right)^2 \qquad \text{czyli}$$

$$w^2\left(\frac{J}{m}\right)^2\frac{d^2w}{d\varphi^2}=w^2GM-w^3\left(\frac{J}{m}\right)^2 \qquad /: w^2$$

otrzymujemy ostatecznie:

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2}+w=\frac{GM}{\left(\frac{J}{m}\right)^2}$$

Wiadomo jednak, że pęd **J** jest stały w każdym punkcie toru, czyli także w punkcie najbliższym gwiazdy, czyli :

$$J=m\cdot V_0\cdot a$$

zatem ostatecznie:

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2}+w=\frac{GM}{(a\cdot V_0)^2} \qquad \text{(patrz rysunek wyżej)}$$

Rozwiązaniem tego równania II-go stopnia jest funkcja:

$$w=A\cos\varphi+\frac{GM}{(aV_0)^2} \qquad \text{czyli}$$

$$\frac{1}{r}=A\cos\varphi+\frac{GM}{(aV_0)^2}$$

$$r=\frac{1}{\frac{GM}{(aV_0)^2}+A\cos\varphi}=\frac{1}{\frac{GM}{(aV_0)^2}\left[1+\frac{A(aV_0)^2}{GM}\cos\varphi\right]}=\frac{\frac{(aV_0)^2}{GM}}{1+\frac{A(aV_0)^2}{GM}\cos\varphi}$$

Otrzymaliśmy ostatecznie wyrażenie na r :

$$r=\frac{\frac{(aV_0)^2}{GM}}{1+\frac{A(aV_0)^2}{GM}\cos\varphi}$$

Wyrażenie to jest uniwersalnym wzorem krzywych stożkowych o parametrze skali **p** :

$$p = \frac{(aV_0)^2}{GM}$$

i parametrze kształtu (mimośrodzie) ε :

$$\varepsilon = \frac{A(aV_0)^2}{GM} = A \cdot p$$

W tej sytuacji pozostaje wyznaczyć stałą A na podstawie założenia, że dla $\varphi = 0^o$ masa **m** znajduje się w odległości **a** od masy **M** czyli:

$$r(\varphi = 0^o) = a = \frac{p}{1 + Ap\cos 0^o} = \frac{p}{1 + Ap} \qquad \text{a stąd :}$$

$$A = \frac{1}{a} - \frac{1}{p}$$

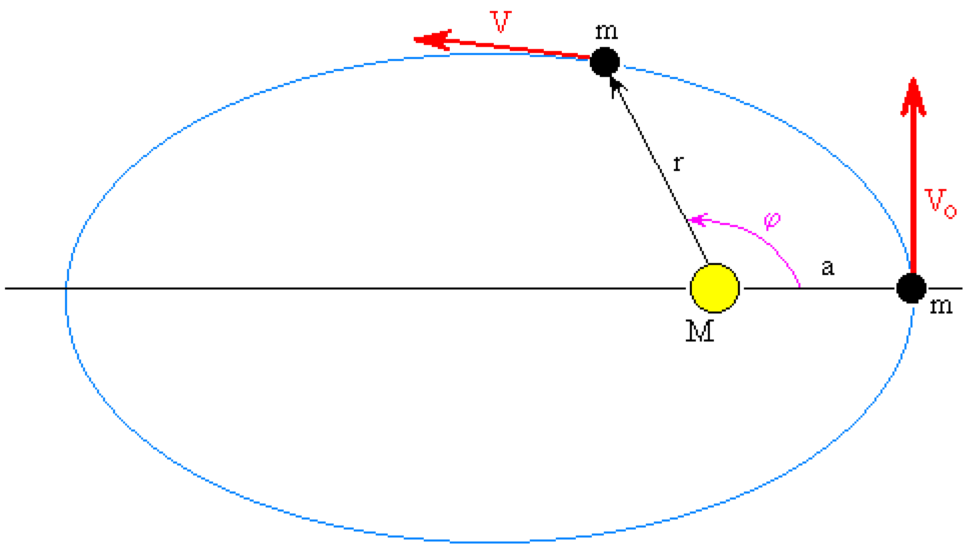
Zatem ostateczne wyrażenie określające zależność **r**(φ, a, V_o) wyraża się wzorem :

$$r = \frac{p}{1 + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{p}\right) \cdot p \cdot \cos\varphi} = \frac{p}{1 + \left(\frac{p}{a} - 1\right) \cdot \cos\varphi} \qquad \text{a dokładnie :}$$

$$r(\varphi, a, V_0) = \frac{\frac{(aV_0)^2}{GM}}{1 + \left(\frac{aV_0^2}{GM} - 1\right) \cdot \cos\varphi} \qquad (5)$$

Poniższy rysunek obrazuje oznaczenia użyte w tym wzorze

(G – stała grawitacji)



Sprawdźmy, czy dla przypadku, w którym siła odśrodkowa, działająca na masę **M** jest równa sile dośrodkowej, działającej na masę **m**, wyrażenie (5) przedstawia sobą okrąg (bo jest to przypadek ruchu po okręgu)?

Wiadomo, że w ruchu po okręgu o promieniu **a** z prędkością $\mathbf{V_0}$ mamy zależność:

$$\frac{mV_0^2}{a} = \frac{GmM}{a^2} \quad \text{czyli}$$

$$V_0^2 = \frac{GM}{a}$$

Postawmy tę wartość V_0^2 do wzoru (5) – otrzymamy wówczas:

$$r = a$$

czyli rzeczywiście mamy do czynienia z ruchem po okręgu o promieniu **a.**

Wyrażenie (5) jest wzorem określającym w sposób ogólny krzywą stożkową, co oznacza, że w zależności od parametrów **p** i ε może to być okrąg, elipsa, parabola lub hiperbola. Sprawdźmy, w jaki sposób zależy to od prędkości V_0 ?

Przepiszmy jeszcze raz równanie uniwersalne w postaci uproszczonej:

$$r = \frac{p}{1 + \left(\frac{p}{a} - 1\right) \cdot \cos\varphi}$$

W wyrażeniu tym $\varepsilon = \frac{p}{a} - 1$

Mamy zatem do czynienia z następującymi przypadkami:

Przypadek 1: $\varepsilon < 0$

$$\frac{p}{a} - 1 < 0$$

$$\frac{p}{a} < 1$$

$$p < a$$

$$\frac{(aV_0)^2}{GM} < a$$

ostatecznie otrzymujemy, że $V_0^2 < \frac{GM}{a}$ czyli ruch po elipsie

Przypadek 1: $\varepsilon = 0$

$$\frac{p}{a} - 1 = 0$$

$$\frac{p}{a} = 1$$

$$p = a$$

$$\frac{(aV_0)^2}{GM} = a$$

ostatecznie dostajemy, że $V_0^2 = \frac{GM}{a}$ czyli mamy do czynienia z ruchem po okręgu

Przypadek 2: $0 \langle \varepsilon \langle 1$

$$0 < \frac{p}{a} - 1 < 1$$

$$1 < \frac{p}{a} < 2$$

$$a < p < 2a$$

$$a < \frac{(aV_0)^2}{GM} < 2a$$

w tym przypadku otrzymujemy $\frac{GM}{a} \langle \mathrm{V}_0^2 \langle 2\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{a}}$ czyli ruch po elipsie

Przypadek 3: $\varepsilon = 1$

$$\frac{p}{a} - 1 = 1$$

$$\frac{p}{a} = 2$$

$$p = 2a$$

$$\frac{(aV_0)^2}{GM} = 2a$$

w tym przypadku otrzymujemy $V_0^2 = 2\frac{GM}{a}$ czyli ruch po paraboli

Przypadek 4: $\varepsilon \rangle 1$

$$\frac{p}{a} - 1 > 1$$

$$\frac{p}{a} > 2$$

$$p > 2a$$

$$\frac{(aV_0)^2}{GM} > 2a$$

teraz otrzymujemy $V_0^2 \rangle 2\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{a}}$ czyli ruch po hiperboli.

Dla $\varepsilon < 0$ przyjmijmy $p = 0.5a$ wtedy

$$r = \frac{0.5a}{1 - 0.5\cos\varphi}$$

(elipsa mniejsza)

Dla $\varepsilon = 0$ przyjmijmy $p = a$ wtedy

$$r = a$$

(okrąg)

Dla $0 < \varepsilon < 1$ przyjmijmy $p = 1.5a$

$$r = \frac{1.5a}{1 + 0.5\cos\varphi}$$

(elipsa większa)

Dla $\varepsilon = 1$ przyjmijmy $p = 2a$

$$r = \frac{2a}{1 + \cos\varphi}$$

(parabola)

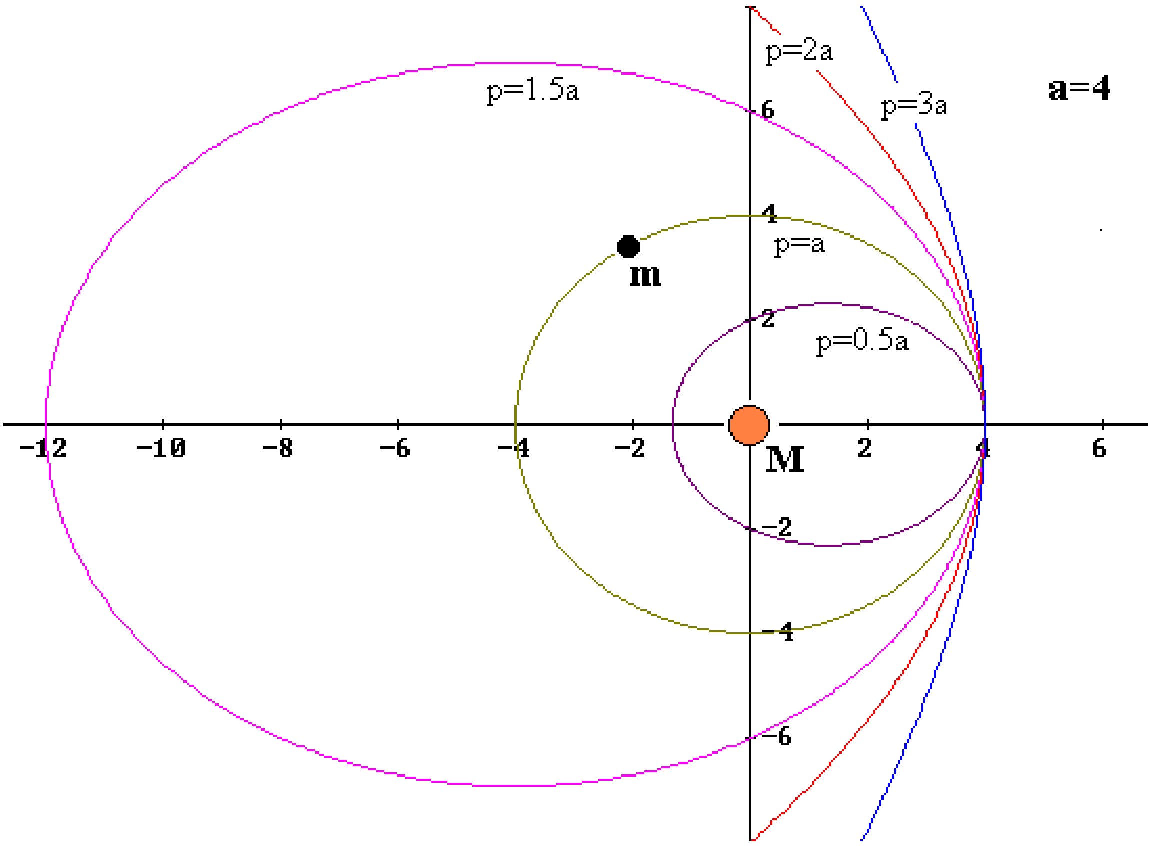
Dla $\varepsilon > 1$ przyjmijmy $p = 3a$

$$r = \frac{3a}{1 + 2\cos\varphi}$$

(hiperbola)

Wszystkie powyższe przypadki przedstawiono na rysunku poniżej:

Wyznaczone kształty torów ruchu planety



(opr. Ryszard Chybicki)